

УДК 669.041 : 536.331.001.573

АНАЛИЗ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ, УЧАСТВУЮЩИХ В ЛУЧИСТОМ ТЕПЛООБМЕНЕ, ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2014 г. Р.П. Коптелов, А.М. Конашкова

Уральский федеральный университет (УрФУ)
им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург

Статья поступила в редакцию 12.10.12 г., доработана 21.11.12 г., подписана в печать 24.11.12 г.

Проведено численное сравнение методов вычисления угловых коэффициентов (УК) с помощью интегрирования при разном взаимном расположении поверхностей. Предложен простой критерий для оценки погрешности вычисления УК априори, а также алгоритм априорного выбора метода и количества узлов интегрирования до вычисления УК. Алгоритм позволяет существенно сократить время вычисления УК путем использования минимального количества узлов интегрирования, обеспечивая при этом желаемую точность для каждой конкретной пары поверхностей. Это подтверждается применением предложенного алгоритма для анализа геометрии методической печи.

Ключевые слова: теплообмен излучением, угловые коэффициенты, интегрирование.

There was made numerical comparison of integration methods for calculation of angular coefficients (ACs) with the aid of integration under different relative position of surfaces. There was offered a simple criterion for assessment of computational error of ACs at first glance, as well as algorithm of a priori choice of method and number of integration nodes before computation of ACs. The algorithm allows substantially decrease time of computation of ACs by means of use of minimum number of nodes for each pair of surface zones. The proposed algorithm is applied for analysis of continuous furnace geometry.

Keywords: radiant heat transfer, angular coefficients, integration.

ВВЕДЕНИЕ

Детализированные расчеты высокотемпературных энергетических агрегатов и печей требуют все более точных моделей теплообмена излучением [1, 2]. При моделировании такого теплообмена необходимо вычисление большого числа угловых коэффициентов (УК) излучения. В ряде случаев (электрические печи сопротивления, индукционный нагрев, печи с радиационными трубами и защитной атмосферой, охлаждение на адьюстаже и др.) наличием среды между поверхностями можно пренебречь.

В отсутствие поглощающей и рассеивающей среды на пути излучения тепловой поток на поверхность i с использованием зонального метода может быть записан следующим выражением [1]:

$$Q_i = A_i \sum_{j=1}^M F_{ij} \int_0^{\infty} (J_{\lambda,i} - J_{\lambda,j}) d\lambda, \quad (1)$$

где F_{ij} — УК между диффузными поверхностями i и j ; A — площадь поверхности; M — количество поверхностей, участвующих в теплообмене; J — тепловой поток эффективного излучения; $J_{\lambda,i}$, $J_{\lambda,j}$ — спектральный тепловой поток эффективного излучения соответственно для поверхностей i и j ; λ — длина волны излучения.

Угловой коэффициент излучения F_{ij} равен доле лучистой энергии, испущенной и отраженной поверхностью i и дошедшей напрямую до поверхности j [3]. В металлургических печах с большим количеством зон может потребоваться вычисление десятков и даже сотен тысяч таких УК [4]. Это представляет наибольшую сложность при расчете тепловых потоков и температур для поверхностных зон печи.

Каждая поверхностная зона, как правило, подразделяется на несколько элементарных поверх-

Коптелов Р.П. — аспирант кафедры автоматики УрФУ (620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19). E-mail: r-koptelov@mail.ru.

Конашкова А.М. — канд. техн. наук, доцент кафедры философии УрФУ. E-mail: a_konashkova@mail.ru.

ностей, которые являются гранями ячеек вычислительной сетки. Угловые коэффициенты могут быть определены для каждой пары поверхностей всех поверхностных зон и записаны в матричной форме. Матрица угловых коэффициентов не зависит от температуры поверхностей, поэтому она может быть вычислена один раз и затем использоваться на всех дальнейших шагах для расчета температур и тепловых потоков поверхностей.

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Здесь рассматриваются четыре метода вычисления УК с помощью интегрирования, описанные в работе [5].

Двукратное поверхностное интегрирование

Основная формула для углового коэффициента F_{12} определяет его через двойной поверхностный интеграл:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_2 dA_1, \quad (2)$$

где A_1 и A_2 — площади поверхностей 1 и 2; θ_1 и θ_2 — углы между нормальными \vec{n}_1, \vec{n}_2 и линией между центрами элементарных площадок dA_1 и dA_2 ; r — расстояние между этими элементарными площадками (рис. 1, а).

Двукратное контурное интегрирование

С помощью теоремы Стокса поверхностные интегралы в формуле (2) превращаются в контурные интегралы:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \ln r d\vec{c}_1 d\vec{c}_2, \quad (3)$$

где C_1 и C_2 — граничные контуры поверхностей A_1 и A_2 ; $d\vec{c}_1$ и $d\vec{c}_2$ — элементарные отрезки соответствующих контуров; r — расстояние между центрами этих элементарных отрезков (см. рис. 1, а).

Однократное поверхностное интегрирование

Угловой коэффициент между бесконечно малой площадкой и площадкой конечных размеров (многоугольником) может быть вычислен по формуле, предложенной в работе [6]:

$$dF_{12} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{NE_2} \vec{g}_j \cdot \vec{n}_1, \quad (4)$$

где NE_2 — число ребер многоугольника 2 (Number of Edges); \vec{g}_j — вектор, направленный по нормали к плоскости, образованной j -м ребром многоугольника и точкой на площадке dA_1 . Если указанное ребро спроецировать на плоскость площадки dA_1 , то длина вектора \vec{g}_j будет равна углу с вершиной в центре dA_1 между лучами, проходящими через вершины проекции ребра. Формула (4) проиллюстрирована на рис. 1, б. Вычисление по ней эквивалентно применению метода единичной сферы [1].

Угловой коэффициент между двумя многоугольниками может быть вычислен путем интегрирования формулы (4):

$$dF_{12} = \frac{1}{2\pi A_1} \int_{A_1} \sum_{j=1}^{NE_2} \vec{g}_j \cdot \vec{n}_1 dA_1. \quad (5)$$

Однократное контурное интегрирование

Один из интегралов в уравнении (3) в случае прямой линии интегрирования (ребра E) может быть вычислен аналитически [7]:

$$I_2 = \int_{\vec{E}} \ln r d\vec{E} = r_1 \ln r_1 \cos(r_1 \wedge E) + r_2 \ln r_2 \cos(r_2 \wedge E) + h(r_1 \wedge r_2) - |E|, \quad (6)$$

где \vec{E} — вектор направления ребра многоугольника; $|E|$ — длина ребра E ; r_1 и r_2 — расстояния между элементарным отрезком контура $d\vec{c}_1$ и концами ребра

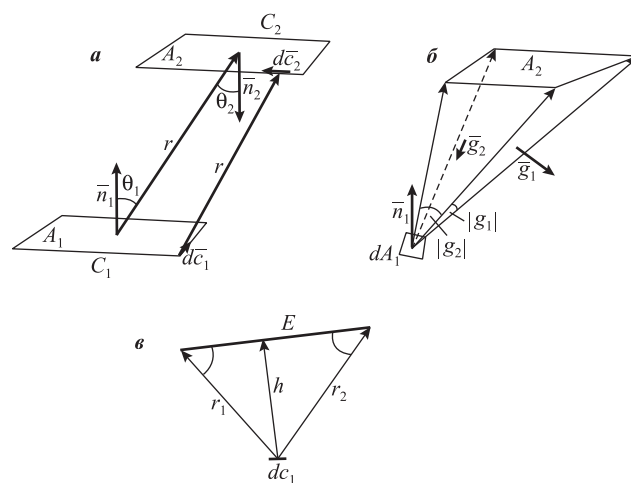


Рис. 1. Иллюстрация формул двойного поверхностного и двойного контурного интегрирования (а), однократного поверхностного (б) и однократного контурного (в) интегрирования

ра E ; $(r_1 \wedge r_2)$ — угол между векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 ; h — длина перпендикуляра, опущенного от $d\vec{c}_1$ на линию ребра E (рис. 1, в). Другие записи этой формулы даны в работах [3, 5].

Важной проблемой является сложность контроля точности вычислений. Известен способ контроля точности вычисления УК, но он является эвристическим: использовать адаптивное интегрирование. Интеграл I вычисляется 2 раза с разным числом узлов интегрирования n_1 и n_2 , $n_2 > n_1$. Если разница между полученными значениями мала: $|I(n_1) - I(n_2)| < \varepsilon$, то в качестве значения интеграла принимают $I(n_2)$, в противном случае требуется дальнейшее увеличение числа узлов интегрирования [5]. Такой подход дает апостериорную оценку погрешности.

Аналитическое решение

Аналитическое выражение для углового коэффициента излучения в прозрачной среде предложено в работе [8]. Однако оно мало подходит для практических приложений из-за высокого времени счета. Приводятся данные [5] о том, что аналитическое решение [8] в 100 раз медленнее, чем вычисление УК по любому из 4-х методов интегрирования (с использованием формулы Гаусса), если по каждой переменной интегрирования применяется 4 узла (т.е., например, в двойном контурном интеграле используется $16 \cdot 4^2 = 256$ узлов и в двойном поверхностном интеграле — $4^4 = 256$ узлов).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДЛЯ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ

На практике точность вычисления УК требует 1—5 % или даже 10 %. Точность расчета тепловых потоков и температур зависит не только от точности определения УК, но и от радиационных свойств поверхностей. Если радиационные характеристики известны с точностью до 5 %, то точное вычисление УК, не сильно увеличив точность расчета температур, лишь потребует дополнительного времени.

Одна из целей данной работы состоит в априорном оценивании ошибки вычисления угловых коэффициентов. Это позволяет выбирать параметры интегрирования для каждого случая расположения поверхностей до расчета УК.

В данном разделе предлагается оценивать погрешность вычисления УК по взаимному расположению многоугольников. Пусть для каждого многоугольника вычислены центр и радиус ограничи-

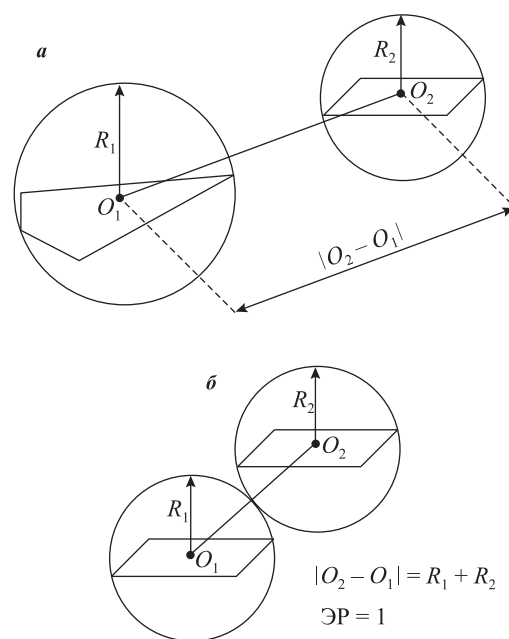


Рис. 2. Геометрическая иллюстрация эффективного расстояния (ЭР)

а — общий случай; *б* — частный случай
ЭР = 1, если сферы касаются друг друга

вающей сферы. Любой многоугольник может быть заключен в эту сферу, но не все его вершины могут лежать на ее поверхности — иными словами, это не описанная сфера. Простой алгоритм вычисления ограничивающей сферы описан в работе [9]. Вычисленная сфера получается в среднем на 5 % больше, чем минимальная ограничивающая сфера. Алгоритм выполняется в два прохода. В первом проходе находятся две вершины многоугольника (не обязательно максимально удаленные). Начальная сфера строится так, чтобы эти две вершины были концами ее диаметра. Во втором проходе проверяется, принадлежит ли следующая вершина сфере, и если нет, то сфера расширяется так, чтобы включить в себя эту вершину, — так происходит до тех пор, пока все вершины многоугольника не будут ограничены сферой.

Введем эффективное расстояние (ЭР) между двумя многоугольниками (или любыми другими фигурами) как расстояние между центрами ограничивающих сфер, деленное на сумму радиусов этих сфер (рис. 2):

$$\text{ЭР} = |O_2 - O_1| / (R_1 + R_2). \quad (7)$$

Введенный критерий имеет следующие преимущества:

— расстояние между центрами сфер характеризует среднее расстояние между многоугольниками;

- критерий безразмерный;
- вычисление ограничивающей сферы проще, чем вычисление минимального расстояния;
- вычисление ограничивающей сферы нужно проводить только для каждой поверхности, т.е. лишь M сфер должно быть вычислено для M^2 угловых коэффициентов. Для каждой пары поверхностей необходимо только вычисление по простейшей формуле (7).

СХЕМА ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО РАССТОЯНИЯ НА ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ УГЛОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА ИЗЛУЧЕНИЯ

Во многих случаях вычислительная сетка состоит из четырехугольников и параллелепипедов. В настоящей работе вычислялось множество угловых коэффициентов для произвольно расположенных четырехугольников и анализировалась связь между ЭР и точностью вычислений.

Четырехугольники генерировались следующим образом. Использовались четыре базовых четырехугольника (рис. 3): единичный квадрат (a), прямоугольник (b) и два параллелограмма с разными длинами сторон и углом 60° (v , z). Такие четырехугольники часто получаются при разбиении модели печи на зоны.

Угловые коэффициенты рассчитывались для пар четырехугольников одинаковой формы. Первый че-

тырехугольник располагался в плоскости $z = 0$ и не преобразовывался в дальнейшем. Его площадь всегда устанавливалась равной единице, а центр находился в начале координат. Второй четырехугольник преобразовывался в другой четырехугольник той же формы, но с другим размером, смещением относительно начала координат и наклоном (рис. 4).

Был использован набор коэффициентов масштабирования: 0,1, 0,5, 1,0, 2,0, 10,0. Смещение по вертикали осуществлялось на следующие значения: 0,1, 0,13, ..., 8,7 — всего 18 значений, которые составляют геометрическую прогрессию с шагом 1,3. Смещение по вертикали всегда больше нуля, поэтому четырехугольники не лежат в одной плоскости. Смещение по горизонтали вдоль оси x производилось на те же значения, за исключением первого, которое устанавливалось равным нулю. Четырехугольник вращался вокруг осей x и z . Угол поворота вокруг каждой оси варьировался от 0 до $\pi/2$ с шагом $\pi/18$. Коэффициент масштабирования, вертикальное и горизонтальное смещения, а также углы поворота варьировались независимо друг от друга. Полное число различных взаимных расположений четырехугольников равно $5 \cdot 10^5$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Угловые коэффициенты для множества четырехугольников были вычислены с помощью 4 методов: двойного поверхностного интегрирования, однократного поверхностного интегрирования, двой-

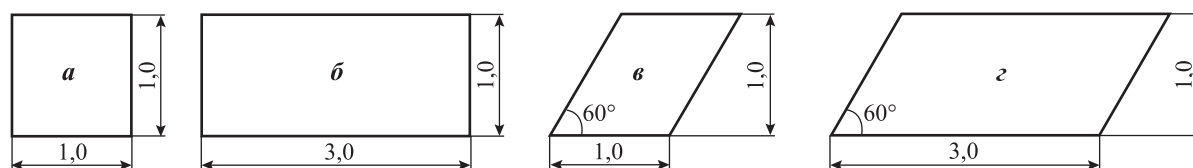
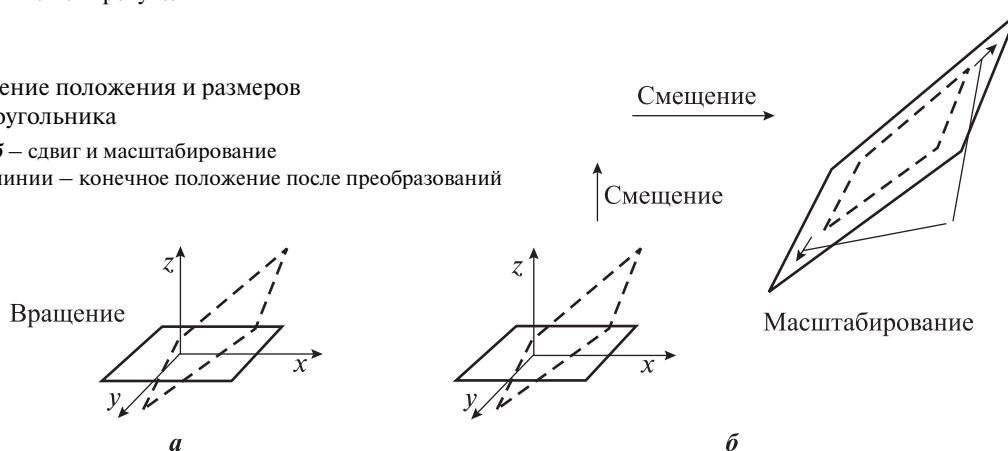


Рис. 3. Различные четырехугольники

Рис. 4. Изменение положения и размеров второго многоугольника

a — вращение; b — сдвиг и масштабирование
Непрерывные линии — конечное положение после преобразований



ного контурного интегрирования и однократного контурного интегрирования. Везде использовались квадратурные формулы Гаусса (произведение одномерных формул). Было принято n — количество узлов интегрирования по одной координате интегрирования. То есть полное число узлов N равно $16n$ в однократном контурном интеграле, n^2 — в однократном поверхностном интеграле, $16n^2$ — в двойном контурном интеграле и n^4 — в двойном поверхностном интеграле.

Угловые коэффициенты были вычислены для более чем $5 \cdot 10^5$ различных конфигураций двух четырехугольников. Анализ результатов показал, что точность вычислений сильно повышается с увеличением эффективного расстояния. Установлено, что для любой наперед заданной точности x можно найти такое эталонное значение $\mathcal{E}P(x)$, что если для какой-либо конфигурации четырехугольников $\mathcal{E}P$ окажется больше, чем эталонное значение $\mathcal{E}P(x)$ (означает, что четырехугольники находятся дальше, чем минимальное расстояние, позволяющее рассчитать УК с заданной точностью), то точность рассчитанного УК окажется всегда выше, чем x . Можно найти значения $\mathcal{E}P(10\%)$, $\mathcal{E}P(5\%)$, $\mathcal{E}P(2\%)$ и $\mathcal{E}P(1\%)$ — такие, что если $\mathcal{E}P_{ij}$, вычисленный для пары четырехугольников i, j , больше, чем, например, $\mathcal{E}P(5\%)$, то погрешность априори может быть оценена меньше, чем 5% , так как это выполняется для всевозможных взаимных расположений четырехугольников. Другими словами, устанавливаются следующие соотношения:

$$\mathcal{E}P_{ij} > \mathcal{E}P(10\%) \rightarrow \Delta F_{ij}/F_{ij} < 10\%, \quad (8)$$

$$\mathcal{E}P_{ij} > \mathcal{E}P(5\%) \rightarrow \Delta F_{ij}/F_{ij} < 5\%, \quad (9)$$

$$\mathcal{E}P_{ij} > \mathcal{E}P(2\%) \rightarrow \Delta F_{ij}/F_{ij} < 2\%, \quad (10)$$

$$\mathcal{E}P_{ij} > \mathcal{E}P(1\%) \rightarrow \Delta F_{ij}/F_{ij} < 1\% \quad (11)$$

и т.д. для любой точности.

Значения $\mathcal{E}P(10\%)$, $\mathcal{E}P(5\%)$, $\mathcal{E}P(2\%)$ и $\mathcal{E}P(1\%)$ определены при различном числе узлов интегрирования в 4-х методах (табл. 1). В первых трех методах при расчетах применялась одинарная точность (числа по 4 байта), однако такой точности недостаточно в случае однократного контурного интеграла (она не позволяет получить погрешность меньше 10% даже при большом числе узлов), поэтому для него использовалась двойная точность. Для анализа учитывались только УК со значением больше 10^{-4} .

В качестве точных значений УК были взяты значения, полученные с помощью однократного контурного интегрирования при $n = 40$ с двойной точностью. Все вычисления были реализованы на Фортране и выполнялись на процессоре «Pentium II 1.83 GHz».

Используя соотношения (8)–(11) и табл. 1, можно сформулировать **алгоритм выбора метода интегрирования и количества узлов**:

1) для всех поверхностей вычисляется ограничивающая сфера;

2) для всех угловых коэффициентов выбирается желаемая точность x (в табл. 1 — соответствующая колонка);

3) для каждой пары четырехугольников i, j вычисляется значение $\mathcal{E}P_{ij}$. Для каждого метода находится такое минимальное значение n , при котором будет выполняться требование по точности: $\mathcal{E}P(x, n) \leq \mathcal{E}P_{ij} \leq \mathcal{E}P(x, n + 1)$. Левая часть неравенства позволяет выполнить требования по точности, а правая часть приводит к использованию минимального числа узлов;

4) имея 4 значения n для 4-х методов и значения времени, которое требуется на вычисление по каждому из методов, можно выбрать самый быстрый метод для расчета углового коэффициента F_{ij} .

Из табл. 1 видно, что точность результатов сильно зависит от $\mathcal{E}P$, и угловые коэффициенты можно вычислять, используя в основном небольшое число узлов интегрирования. Значения $\mathcal{E}P(10\%)$, $\mathcal{E}P(5\%)$, $\mathcal{E}P(2\%)$ и $\mathcal{E}P(1\%)$ выбраны так, чтобы выполнить требования по точности во всех возможных случаях взаимного расположения поверхностей, однако это приводит к тому, что значения $\mathcal{E}P$ получаются завышенными для многих простых случаев. Например, радиусы ограничивающих сфер для двух коаксиальных квадратов равны $R_1 = R_2 = 1/\sqrt{2}$. Если квадраты находятся на расстоянии, равном единице, то $\mathcal{E}P = \sqrt{2}/2 \approx 0,71$. В этом случае точность 10% не может быть достигнута, судя по табл. 1, однако результаты многих исследований [3, 5] показывают, что на самом деле даже $n = 2$ достаточно, чтобы получить точность 1% . Это означает, что минимальное число узлов, которое получается по табл. 1 при $\mathcal{E}P > 1$, не может быть определено при $\mathcal{E}P < 1$, особенно если необходима точность 1% .

Оценим долю угловых коэффициентов, для которых можно с помощью табл. 1 определить достаточное количество узлов. Если $\mathcal{E}P > 1$ для двух четырехугольников, то УК может быть вычислен любым из 4-х методов при небольшом числе узлов. Отметим,

Таблица 1

Значения эффективного расстояния, которые позволяют вычислить угловой коэффициент с заданной точностью

Метод вычисления	Число узлов в одномерном интеграле (n)	Полное число узлов интегрирования (N)	Время расчета 10^6 УК, с	Время расчета 10^6 УК относительно базового варианта	ЭР (10 %)	ЭР (5 %)	ЭР (2 %)	ЭР (1 %)
Двойной поверхностный интеграл	1 (базовый вариант)	$1^4 = 1$	0,66	1,00	4,10	6,20	7,40	9,20
	2	$2^4 = 16$	2,04	3,09	1,55	2,00	2,60	2,95
	3	$3^4 = 81$	5,92	8,97	1,20	1,35	1,55	1,60
	4	$4^4 = 256$	15,02	22,76	1,05	1,20	1,20	1,35
	5	$5^4 = 625$	32,76	49,64	0,9	1,05	1,05	1,20
	6	$6^4 = 1296$	64,14	97,18	0,8	0,9	1,00	1,05
Однократный поверхностный интеграл	1	$1^2 = 1$	1,86	2,82	3,60	5,10	8,40	10,2
	2	$2^2 = 4$	6,89	10,44	1,55	2,00	2,60	2,95
	3	$3^2 = 9$	15,13	22,92	1,20	1,35	1,55	1,60
	4	$4^2 = 16$	26,65	40,38	1,05	1,20	1,20	1,35
	5	$5^2 = 25$	41,51	62,89	0,90	1,05	1,05	1,20
	6	$6^2 = 36$	59,74	90,52	0,80	0,90	1,00	1,05
Двойной контурный интеграл	1	$16 \cdot 1^2 = 16$	3,33	5,05	6,30	6,65	8,70	9,10
	2	$16 \cdot 2^2 = 64$	7,41	11,23	2,45	3,20	3,20	3,70
	3	$16 \cdot 3^2 = 144$	13,75	20,83	1,80	1,90	2,30	2,30
	4	$16 \cdot 4^2 = 256$	22,37	33,89	1,35	1,45	1,45	1,8
	5	$16 \cdot 5^2 = 400$	33,35	50,53	1,05	1,15	1,35	1,35
	6	$16 \cdot 6^2 = 576$	46,69	70,74	1,05	1,05	1,05	1,15
Однократный контурный интеграл	1	$16 \cdot 1 = 16$	10,22	15,48	6,25	6,65	8,70	9,10
	2	$16 \cdot 2 = 32$	18,07	27,38	2,25	2,25	2,95	3,35
	3	$16 \cdot 3 = 48$	25,86	39,19	1,50	1,50	1,75	2,00
	4	$16 \cdot 4 = 64$	33,59	50,89	0,9	1,05	1,15	1,35

что $\text{ЭР} = 1$, если ограничивающие сферы четырехугольников касаются друг друга (см. рис. 3, б). Следовательно, $\text{ЭР} > 1$, если ограничивающие сферы не пересекаются и не касаются. Тогда предложенный алгоритм подходит для всех пар четырехугольников, ограничивающие сферы которых не пересекаются.

Соседние поверхности составляют малую долю от всех пар поверхностей, и только для них требуется использовать квадратурные формулы высокого порядка или аналитическое решение.

АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИИ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПЕЧИ

Предложенные критерий и алгоритм выбора количества узлов интегрирования были применены для анализа геометрии методической печи (рис. 5).

Сведения о модели:

Количество узлов сетки по осям x, y, z $46 \times 7 \times 21$

Количество поверхностных элементов сетки по осям x, y, z $45 \times 6 \times 20$

Всего узлов 6762

Всего объемных элементов (ячеек) сетки 5400

Всего поверхностей, участвующих в теплообмене излучением (стенки печи и поверхности заготовок) 3420

Число угловых коэффициентов $3420^2 = 11,7 \cdot 10^6$

Число УК, которые нужно рассчитывать (с учетом правила взаимности и условия выпуклости всех поверхностей) $5,8 \cdot 10^6$

Для представленной модели с помощью предложенного алгоритма было определено, какая доля УК

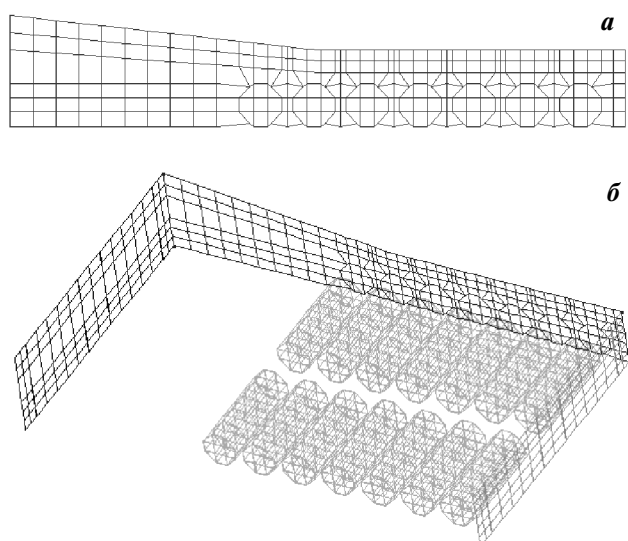


Рис. 5. Модель зоны методической печи с заготовками
а — вид сбоку (плоскость xy); **б** — общий вид (показаны заготовки, лежащие в два ряда, торцевые стенки и задняя стенка)

может быть вычислена с использованием разного числа узлов интегрирования. Геометрия печи такая, что не все поверхности видят друг друга, т.е. имеется экранирование излучения. Методы контурного интегрирования не предназначены для расчета УК

в системах с экранированием излучения, поэтому анализ геометрии проводился для методов двойного и однократного поверхностного интегрирования. Результаты представлены в табл. 2 и 3.

Из табл. 2 и 3 видно, что уменьшить количество узлов интегрирования можно почти для всех пар поверхностей: для 99,65 %, если требуется точность вычисления 1 %, и для 99,87 % — если достаточно иметь точность вычисления угловых коэффициентов 10 %. Для достижения точности 10 % более 90 % УК могут быть вычислены с использованием одного узла интегрирования в центре каждой площадки, и более 99,2 % УК могут быть определены, если по каждой переменной интегрирования применять квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами. Для достижения точности 1 % более 54 % УК могут быть вычислены с использованием одного узла интегрирования в центре каждой площадки, и более 95,7 % УК могут быть рассчитаны, если по каждой переменной интегрирования применять квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами.

Также интересны результаты о среднем числе узлов на каждой площадке: менее 3 узлов в среднем достаточно для вычисления УК с точностью 1 % и менее 2 узлов — для точности 10 %. Такой высокой

Таблица 2

Метод двойного поверхностного интегрирования

Доля угловых коэффициентов, которые могут быть вычислены

с использованием небольшого количества узлов интегрирования при заданной точности вычисления

Заданная точность, %	Среднее число узлов на каждой поверхности	Доля УК, %, при различном числе узлов в четырехмерном интеграле						
		$1^4 = 1$	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	$6^4 = 1296$	$> 6^4$
10	1,49	90,83	8,36	0,35	0,11	0,15	0,07	0,13
5	1,95	79,38	18,97	1,07	0,13	0,11	0,15	0,20
2	2,33	72,10	24,82	2,28	0,35	0,11	0,03	0,32
1	2,78	60,70	35,02	3,38	0,31	0,13	0,11	0,35

Таблица 3

Метод однократного поверхностного интегрирования

Доля угловых коэффициентов, которые могут быть вычислены

с использованием небольшого количества узлов интегрирования при заданной точности вычисления

Заданная точность, %	Среднее число узлов на каждой поверхности	Доля УК, %, при различном числе узлов в двойном интеграле						
		$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$> 6^2$
10	1,42	93,16	6,03	0,35	0,11	0,15	0,07	0,13
5	1,76	85,66	12,69	1,07	0,13	0,11	0,15	0,20
2	2,52	65,86	31,06	2,28	0,35	0,11	0,03	0,32
1	2,97	54,26	41,47	3,38	0,31	0,13	0,11	0,35

точности при столь малом числе узлов невозможно получить, если использовать одинаковое число узлов для расчета всех УК. В реальности предложенный алгоритм выбора числа узлов интегрирования позволяет сократить время вычисления угловых коэффициентов излучения в несколько раз.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное сравнение различных методов вычислений угловых коэффициентов излучения между четырехугольными поверхностями для их различных геометрических расположений. Для каждого из 4-х методов и для каждого фиксированного числа узлов интегрирования было рассчитано более $2 \cdot 10^5$ УК.

Результаты показали, что точность вычислений УК может быть априори оценена с помощью одного простого параметра — эффективного расстояния. Это позволяет априори выбирать минимальное число узлов интегрирования для каждой пары четырехугольников, благодаря чему в несколько раз сокращается время расчета матрицы угловых коэффициентов и достигается желаемая точность.

Предложенный алгоритм выбора числа узлов интегрирования продемонстрирован на примере геометрии методической печи. Результаты показали, что большинство угловых коэффициентов может быть вычислено с использованием 4; 16 или даже одного узла интегрирования, тем самым в несколько

раз сокращая время расчета УК. Таких результатов невозможно достичь, используя постоянное число узлов интегрирования для всех угловых коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Modest M.F.* Radiative heat transfer. 2-nd ed. N.Y.: Acad. Press, 2003.
2. *Лисиенко В.Г.* Совершенствование и повышение эффективности энерготехнологий и производств. Интегрированный энергоэкологический анализ: теория и практика. Т. 1. М.: Теплотехник, 2010.
3. *Emery A.F., Johansson O., Lobo M., Abrous A.* // ASME J. Heat Transfer. 1991. Vol. 113. P. 413.
4. *Маликов Г.К., Лисиенко В.Г., Коптелов Р.П.* // Изв. вузов. Чер. металлургия. 2010. № 7. С. 53.
5. *Walton G.N.* Calculation of obstructed view factors by adaptive integration: NISTIR 6925. National Institute of Standards and Technology, 2002.
6. *Hottel H.C., Sarofim A.F.* Radiative transfer. N.Y.: McGraw-Hill, 1967.
7. *Mitalas G.P., Slephenson D.G.* Fortran IV programs to calculate radiant interchange factors. Ottawa (Canada): NRC of Canada, 1966.
8. *Schroder P., Hanrahan P.* A Closed form expression for the form factor between two polygons. Princeton Univ., Department of Computer Science, 1993.
9. *Glassner A.S.* Graphics Gems. Vol. I. N.Y.: Acad. Press, 1990. P. 301.