

УДК 546.34 + 666.123.24 + 669.2/.8

<https://doi.org/10.17073/0021-3438-2024-3-45-56>

Научная статья

Research article



Разработка и решение уравнения кинетики и изотермы адсорбции золота из цианистых растворов на активированный уголь

В.В. Ёлшин, А.П. Миронов, А.А. Лисицына**Иркутский национальный исследовательский технический университет**
Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83

✉ Анастасия Андреевна Лисицына (Gerasimovan19@rambler.ru)

Аннотация: Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований процесса адсорбции золота из цианистых растворов на активированный уголь (АУ). Одной из задач работы было выявление функциональной зависимости между загрузкой массы АУ в объеме раствора адсорбционной колонны и кинетикой процесса. Для ее решения предложено модифицированное уравнение кинетики адсорбции (с учетом гетерогенности процесса) в виде включения твердой фазы угольного сорбента в единице объема раствора в качестве третьего промежуточного агента адсорбционного взаимодействия между ионами адсорбата и свободными активными центрами АУ. В результате получены модифицированное уравнение кинетики адсорбции золота на АУ 3-го порядка с учетом твердой фазы загрузки АУ в объеме раствора и его аналитические решения при условиях постоянства содержания золота в исходном растворе и проведения процесса в замкнутом объеме с изменяющейся концентрацией золота в растворе согласно уравнению материального баланса. Установлена взаимосвязь между решениями кинетического уравнения и уравнением изотермы адсорбции. Из решений кинетического уравнения получено модифицированное уравнение изотермы Ленгмюра, позволяющее находить равновесные концентрации золота на АУ и в растворе доопытно при условии проведения процесса в замкнутом объеме и известных начальных значениях содержаний золота в растворе и на АУ, а также при известной загрузке АУ в объеме адсорбера. Обсуждены теоретические зависимости констант скоростей адсорбции и десорбции от температуры, конвективных и диффузионных параметров. Представленная математическая модель кинетики адсорбции справедлива для условий проведения процесса адсорбции золота на АУ из золотоцианистых растворов при времени адсорбции до 2 суток и степени заполнения полной предельной емкости сорбента 40–60 %.

Ключевые слова: золото, кинетика, адсорбция, угольный адсорбент, изотерма адсорбции, цианистый раствор, константа скорости реакции, математическое моделирование.

Благодарности: Авторы благодарят сотрудников лаборатории № 15 АО «Иргиредмет» (г. Иркутск) за предоставленные экспериментальные данные по кинетике адсорбции золота на активированный уголь и за содействие в проведении анализов.

Для цитирования: Ёлшин В.В., Миронов А.П., Лисицына А.А. Разработка и решение уравнения кинетики и изотермы адсорбции золота из цианистых растворов на активированный уголь. *Известия вузов. Цветная металлургия*. 2024;30(3):45–56.

<https://doi.org/10.17073/0021-3438-2024-3-45-56>

Development and solution of the kinetics equation and adsorption isotherm for gold adsorption from cyanide solutions onto activated carbon

V.V. Elshin, A.P. Mironov, A.A. Lisitsyna**Irkutsk National Research Technical University**
83 Lermontov Str., Irkutsk 664074, Russia

✉ Anastasia A. Lisitsyna (Gerasimovan19@rambler.ru)

Abstract: This paper presents the results of theoretical and experimental studies on the process of gold adsorption from cyanide solutions onto activated carbon (AC). One of the objectives of the study was to identify the functional relationship between the mass loading of AC in the volume of the adsorption column solution and the kinetics of the process. To achieve this, a modified adsorption kinetics equation

(considering the heterogeneity of the process) was proposed, which incorporates the solid phase of the carbon sorbent in the unit volume of solution as a third intermediate agent of adsorption interaction between the adsorbate ions and the free active sites of the AC. As a result, a modified third-order adsorption kinetics equation for gold adsorption on AC was derived, taking into account the solid phase loading of AC in the solution volume, along with its analytical solutions under conditions of constant gold content in the initial solution and the process conducted in a closed volume with varying gold concentrations in the solution according to the material balance equation. The relationship between the solutions of the kinetic equation and the adsorption isotherm equation was established. From the solutions of the kinetic equation, a modified Langmuir isotherm equation was derived, which allows determining the equilibrium concentrations of gold on the AC and in the solution a priori under the condition that the process is conducted in a closed volume, with known initial gold contents in the solution and on the AC, as well as with a known AC loading in the adsorber volume. The theoretical dependencies of the adsorption and desorption rate constants on temperature, convective, and diffusion parameters are discussed. The presented mathematical model of adsorption kinetics is valid under the conditions of gold adsorption on AC from gold cyanide solutions with an adsorption time of up to 2 days and a sorbent capacity utilization degree of 40–60%.

Keywords: gold, kinetics, adsorption, carbon adsorbent, adsorption isotherm, cyanide solution, reaction rate constant, mathematical modeling.

Acknowledgments: The authors express their gratitude to the staff of Laboratory No. 15 of “Irgiredmet” OJSC for providing experimental data on the kinetics of gold adsorption onto activated carbon and for assisting with the analyses.

For citation: Elshin V.V., Mironov A.P., Lisitsyna A.A. Development and solution of the kinetics equation and adsorption isotherm for gold adsorption from cyanide solutions onto activated carbon. *Izvestiya. Non-Ferrous Metallurgy*. 2024;30(3):45–56.

<https://doi.org/10.17073/0021-3438-2024-3-45-56>

Введение

Фундаментальной проблемой в области угольно-сорбционной технологии извлечения золота из золотоцианистых растворов является отсутствие общепринятого теоретически обоснованного уравнения кинетики этого процесса, которое может адекватно описывать как динамику, так и статику процесса сорбции с учетом переменных режимных факторов — концентрации металла и массы активированного угля (АУ) в объеме раствора. Из существующих в настоящее время наиболее распространенных и применяемых на практике являются два полуэмпирических уравнения кинетики Флеминга [1–3]. Первое из них в принципе не может быть адекватно процессу сорбции, так как не предполагает существование изотермы, а второе — справедливо только для процесса сорбции с линейной изотермой, что в нашем случае неприемлемо, так как противоречит экспериментальным данным.

В связи с этим необходимо выбрать из ныне существующих наработок в этой области теоретически обоснованное уравнение кинетики адсорбции и при необходимости доработать его до состояния качественного соответствия установленным к настоящему времени закономерностям процесса адсорбции. При этом одним из главных условий должна быть возможность аналитического вывода уравнения изотермы из выбранного уравнения кинетики. Для дальнейшей доработки математической модели до количественного соответствия кинетическим характеристикам процесса адсорбции необходимо провести серию стандартных экспериментальных исследований процесса с получением кинетических кривых для различных

начальных условий по определяющим режимным факторам — начальной концентрации золота в растворе и загрузке угля в объеме адсорбера. По экспериментальным кинетическим кривым и кривой изотермы можно провести идентификацию прогнозной математической модели, конечным результатом которой будут численные значения констант идентификации, соответствующие паспортным характеристикам угольного сорбента.

Таким образом, целью работы являлась попытка решения фундаментальной проблемы в области теории и практики адсорбции золота из золотоцианистых растворов на активированный уголь — теоретическое обоснование физического смысла предложенного уравнения кинетики и уравнения изотермы процесса адсорбции для создания прогнозной математической модели, способной адекватно на количественном уровне описать динамику процесса адсорбции в рамках разработки производственных технологических схем и оптимизации их работы. Настоящее исследование предваряет собой последующий цикл статей, посвященных проблеме моделирования процессов сорбции благородных металлов на АУ, затрагивающих вопросы внутридиффузионной кинетики, противоточных процессов сорбции из растворов и пульп (CIL- и CIP-процессы).

1. Методика исследований

Для построения изотермы сорбции золота на активированный уголь (NORIT-3515) использовали статический метод постоянных навесок АУ

массой 1,5 г и переменных концентраций золота от 3,2 до 39,8 мг/дм³ в цианистых растворах с концентрацией NaCN 176,0 мг/дм³, pH = 10,8. Температуры растворов на протяжении всего времени экспериментов поддерживали в диапазоне 20–22 °С.

Адсорбер представлял собой круглую емкость из органического стекла с плоским дном и перемешивающим устройством с регулятором числа оборотов мешалки. Соотношение высоты адсорбера к диаметру составляло 2,5 : 1,0, объем раствора для каждого эксперимента — 3 дм³, полное время снятия одного равновесного значения изотермы — 216 ч. Через определенные интервалы времени от начала опыта проводили отбор проб для построения кинетических кривых.

Концентрацию золота в растворах определяли при помощи атомно-абсорбционного спектрофотометра ICE 3300 («Thermo Fisher Scientific», США) в сертифицированном аналитическом центре АО «Иргиредмет» (Свидетельство № 222.0132/RA.RU.311866/2021 об аттестации методики измерений). Среднеквадратичное отклонение воспроизводимости результатов анализа для концентраций золота в растворах 0,01–0,10 мг/дм³ составляло от 0,003 до 0,007 с границей погрешности $\pm 0,006 \div 0,014$ мг/дм³ при доверительной вероятности $P = 0,95$. Границы погрешности при $P = 0,95$ для диапазона концентраций 0,2–1,0 мг/дм³ составили $\pm 0,04 \div 0,08$ мг/дм³, для 3,0–10,0 мг/дм³ — $\pm 0,2 \div 0,5$ мг/дм³, для 20,0–50,0 мг/дм³ — $\pm 1,0 \div 2,5$ мг/дм³. Результаты экспериментов подвергали статистической обработке, рассчитывая показатели математического ожидания, среднеквадратичного отклонения, доверительного интервала воспроизводимости для каждой точки изотермы и кинетических кривых.

1.1. Теоретические основы кинетики процесса адсорбции золота из цианистых растворов на активированный уголь

1.1.1. Теоретическое обоснование выбора уравнения кинетики 3-го порядка

Экспериментальное моделирование кинетики адсорбционного процесса может быть проведено двумя способами. В первом случае адсорбция проводится в условиях постоянства содержания золота в растворе, а во втором — в замкнутом объеме при постоянно меняющейся, согласно материальному балансу, концентрации золота в растворе. Несмотря на то, что механизм адсорбции и

уравнение кинетики, описывающие адсорбционный процесс, остаются неизменными, решения уравнений кинетики в обоих случаях отличаются друг от друга и имеют разное практическое применение. [4; 5] Решение, полученное из уравнения кинетики для адсорбции в замкнутом объеме, с учетом дополнительных условий, связанных с ионным составом раствора и его непрерывным потоком через адсорберы, может быть напрямую использовано в расчетах непрерывного противоточного процесса адсорбции золота на активированный уголь [6–10], осуществляемого в серии последовательно расположенных сорбционных аппаратов.

Общепринятое уравнение кинетики адсорбции золота из цианистых растворов на АУ с учетом обратимости процесса адсорбции и существования предельной емкости адсорбента имеет вид

$$\frac{dC_y}{dt} = K_1(C_0 - C_y)C_p - K_2C_y, \quad (1)$$

где C_y — содержание золота в нагруженном угле, мг/г; C_p — концентрация золота в растворе, мг/дм³; C_0 — предельная адсорбционная емкость адсорбента, мг/г; K_1 — константа скорости адсорбции, дм³/(мг·ч); K_2 — константа скорости десорбции, ч⁻¹; t — время, ч.

Это классический вид уравнения для обратимой гомогенной химической реакции 2-го порядка, а так как оно описывает гетерогенный процесс адсорбции, то здесь априори принимается, что поскольку масса твердофазного адсорбента в процессе адсорбции постоянна, то она автоматически учитывается в константе скорости адсорбции. Для практического использования решения уравнения кинетики (1), поведение которого в большей степени зависит от загрузки адсорбента, необходимо установить функциональную зависимость скорости адсорбции от содержания массы АУ в растворе. Вопрос учета этого обстоятельства может быть решен исходя из того, что гетерогенный физико-химический процесс адсорбции AuCN_2^- на АУ имеет 3-й порядок взаимодействия в отличие от гомогенной химической реакции 2-го порядка (1).

Отличие этих двух процессов заключается в том, что в химической реакции участвуют два вещества, одинаково равномерно растворенных в жидкости и имеющих одинаковую вероятность парного взаимодействия в любой точке раствора, в то время как в процессе адсорбции растворенные в жидкой фазе ионы адсорбата, в зависимости от своего расположения, имеют разную вероятность

достижения поверхности адсорбента для взаимодействия со свободными активными центрами, содержащимися в мелкодисперсной твердой фазе адсорбента, распределенной в жидкой фазе раствора.

Таким образом, акт парного взаимодействия иона адсорбата с активными центрами адсорбента разбивается на два последовательно происходящих процесса: первый — это транспортировка иона адсорбата в фазе раствора к поверхности твердой фазы адсорбента, второй — взаимодействие некоторого количества ионов из числа достигших поверхности со свободными активными центрами адсорбента, в то время как другая их часть десорбируется обратно в фазу раствора.

На кинетику процесса адсорбции решающим образом влияют такие внутренние режимные параметры, как загрузка определенной массы АУ в единицу объема раствора и концентрация золота в растворе. Поскольку адсорбция является массо-статистическим процессом, то она должна подчиняться закону действующих масс. Это означает, что интенсивность любых парных взаимодействий всегда прямо пропорциональна произведению концентраций взаимодействующих агентов. Если взаимодействие агентов происходит не напрямую, а через промежуточную стадию, которая отсеивает какую-то часть одного из агентов, то интенсивность конечного парного взаимодействия этих агентов будет равна произведению оставшейся концентрации агента, прошедшего через промежуточную стадию, на концентрацию второго агента.

Согласно закону действующих масс произведение $C_p \cdot m/V$ характеризует интенсивность первого акта взаимодействия растворенных ионов AuCN_2^- с поверхностью твердой фазы гранул адсорбента, так как m/V (г/дм³) — это содержание, или загрузка, массы адсорбента (m , г) в единицу объема раствора (V , дм³). Этот параметр содержит в себе все физико-химические характеристики адсорбента, включая размер гранул, эффективную поверхность, пористость, ее характер и т.д., которые должны быть отражены в константе скорости K_1 .

Интенсивность второго акта парного взаимодействия ионов AuCN_2^- , достигших поверхности твердой фазы, со свободными активными центрами адсорбента, будет пропорциональна, согласно закону действующих масс, произведению $C_p \cdot m/V$ на содержание свободных активных центров в массе твердой фазы адсорбента $C_0 - C_y$, т.е. $C_p \cdot m/V \cdot (C_0 - C_y)$.

Исходя из вышеизложенных представлений о

процессе адсорбции ионов AuCN_2^- на АУ, записываем дифференциальное уравнение кинетики адсорбции 3-го порядка с учетом гетерогенности и обратимости процесса:

$$\frac{dC_y}{dt} = K_1(C_0 - C_y) \left(C_p \frac{m}{V} \right) - K_2 C_y, \quad (2)$$

где K_1 — константа скорости адсорбции, (дм³)²/(г·мг·ч).

Это уравнение справедливо только для первых двух стадий адсорбции: конвективного массопереноса и пленочно-приповерхностной диффузии, т.е. примерно до 40–60 %-ного заполнения от полной емкости угля [1–3]. Данная работа ограничена рассмотрением только этих двух наиболее быстрых стадий процесса адсорбции. При этом предполагается, что в начальный промежуток времени, примерно до 2 суток, вклад третьей наиболее медленной и значительно более продолжительной внутридиффузионной стадии незначителен.

1.1.2. Аналитические решения уравнения кинетики и вывод уравнения изотермы

Первое аналитическое решение уравнения кинетики (2) получено при условии, что концентрация золота в растворе постоянна и равна C_{p0} . На практике такие условия могут реализовываться при малой загрузке АУ в большом объеме раствора (в неограниченном пределе).

Частное решение уравнения (2) при условии, что $C_p = \text{const}$, и для начальных условий $C_p = C_{p0}$, $C_y = C_{y0}$ при $t = 0$ будет иметь вид

$$C_y = \frac{K_1 C_0 C_{p0} m/V}{K_1 C_{p0} m/V + K_2} \left(1 - e^{-(K_1 C_{p0} m/V + K_2)t} \right) + C_{y0} e^{-(K_1 C_{p0} m/V + K_2)t}, \quad (3)$$

где C_{y0} — начальное содержание золота в угле, мг/г; C_{p0} — начальная постоянная концентрация золота в цианистом растворе, мг/дм³.

Решение (3) показывает, что при $t \rightarrow \infty$ $e^{-(K_1 C_{p0} m/V + K_2)t} \rightarrow 0$, а следовательно, величина C_y будет стремиться к своему изотермическому значению, определяемому выражением

$$C_y = \frac{C_0 C_{p0} m/V}{C_{p0} m/V + K_2 / K_1}, \quad (4)$$

которое представляет собой модифицированную форму изотермы Ленгмюра с учетом загрузки m/V адсорбента в объеме адсорбера. Учитывая, что $C_{p0} = \text{const}$, время, требуемое для получения равно-

весного значения C_y , может быть достаточно длительным, иногда измеряемое месяцами.

Для решения уравнения кинетики (2) в условиях адсорбции в замкнутом объеме необходимо его дополнить уравнением материального баланса:

$$(C_y - C_{y0})m = (C_{p0} - C_p)V, \quad (5)$$

где m — масса угля, г; V — объем раствора, дм³; C_{p0} — начальная концентрация золота в цианистом растворе, мг/дм³.

Из уравнения (5) находим выражение для текущего значения C_p :

$$C_p = C_{p0} - \frac{m}{V}(C_y - C_{y0}), \quad (6)$$

подставив которое в (2), получим нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка с правой частью в виде квадратного трехчлена относительно C_y с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{dC_y}{dt} = & K_1 \left(\frac{m}{V} \right)^2 C_y^2 - \\ & - \left[K_1 C_0 \left(\frac{m}{V} \right)^2 + K_1 C_{p0} \frac{m}{V} + K_1 \left(\frac{m}{V} \right)^2 C_{y0} + K_2 \right] C_y + \\ & + K_1 C_0 C_{p0} \frac{m}{V} + K_1 \left(\frac{m}{V} \right)^2 C_0 C_{y0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Известно, что квадратный трехчлен всегда можно представить в виде произведения двух линейных двучленов, если известны его корни, которые можно найти, приравняв нулю правую часть уравнения (7):

$$C_{y1} = 0,5 \left[C_0 + \frac{V}{m} C_{p0} + C_{y0} + \frac{K_2}{K_1} \left(\frac{V}{m} \right)^2 \right] + \\ + \sqrt{0,25 \left[C_0 + \frac{V}{m} C_{p0} + C_{y0} + \frac{K_2}{K_1} \left(\frac{V}{m} \right)^2 \right]^2 - \left[\frac{V}{m} C_0 \left(C_{p0} + C_{y0} \frac{m}{V} \right) \right]}, \quad (8)$$

$$C_{y2} = 0,5 \left[C_0 + \frac{V}{m} C_{p0} + C_{y0} + \frac{K_2}{K_1} \left(\frac{V}{m} \right)^2 \right] - \\ - \sqrt{0,25 \left[C_0 + \frac{V}{m} C_{p0} + C_{y0} + \frac{K_2}{K_1} \left(\frac{V}{m} \right)^2 \right]^2 - \left[\frac{V}{m} C_0 \left(C_{p0} + C_{y0} \frac{m}{V} \right) \right]}. \quad (9)$$

Зная корни C_{y1} и C_{y2} , уравнение (7) можно записать в виде

$$\frac{dC_y}{dt} = K_1 \left(\frac{m}{V} \right)^2 (C_y - C_{y1})(C_y - C_{y2}). \quad (10)$$

Это выражение представляет собой уравнение взаимодействия масс с известным реше-

нием [11]. В нашем случае оно выглядит следующим образом:

$$C_y = \frac{c_1 C_{y2} e^{K_1(m/V)^2(C_{y1}-C_{y2})t} - c_2 K_1(m/V)^2 C_{y1}}{c_1 e^{K_1(m/V)^2(C_{y1}-C_{y2})t} - c_2 K_1(m/V)^2}, \quad (11)$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы.

Таким образом, (11) фактически является решением двух уравнений: дифференциального уравнения кинетики и уравнения материального баланса, поэтому частное решение при начальных условиях $t = 0$, $C_y = C_{y0}$ и $C_p = C_{p0}$ имеет вид

$$C_y = \frac{C_{y2} \left(\frac{C_{y0} - C_{y1}}{C_{y0} - C_{y2}} \right) \cdot e^{K_1(m/V)^2(C_{y1}-C_{y2})t} - C_{y1}}{\left(\frac{C_{y0} - C_{y1}}{C_{y0} - C_{y2}} \right) \cdot e^{K_1(m/V)^2(C_{y1}-C_{y2})t} - 1}. \quad (12)$$

Анализ решения (12) показывает, что при $t \rightarrow \infty$ величина $C_y = C_{y2}$. Поскольку C_y в каждом конкретном случае при различных значениях C_{p0} , C_{y0} и $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к изотермическому значению, которое равно C_{y2} , то корень C_{y2} должен представлять собой изотермическую точку для кривой кинетики, а совокупность этих точек для разных значений C_{p0} — изотермическую кривую. Следовательно, зависимость C_{y2} от конечной равновесной концентрации золота в растворе C_p , значение которой можно получить из уравнения материального баланса, является уравнением изотермы.

Возвращаясь к выражению (9), видим, что C_{y2} зависит от многих параметров, в том числе от начальной концентрации золота в растворе (C_{p0}) и его содержания в регенерированном угле (C_{y0}), а также от массы загрузки угля (m/V) в объеме адсорбера. Поскольку уравнение изотермы должно связывать C_{y2} с конечной равновесной концентрацией золота в растворе C_p , то из уравнения материального баланса (5) для заданного значения C_{y2} находим величину C_p .

Выразив C_{p0} и C_{y0} через равновесные значения C_{y2} и C_p и подставив их в выражение (9), после ряда элементарных преобразований получим уравнение, связывающее C_{y2} с C_p и m/V :

$$C_{y2} = \frac{C_0 C_p m/V}{K_2/K_1 + C_p m/V}, \quad (13)$$

где C_{y2} — изотермическое значение содержания золота, мг/г; C_0 — предельная адсорбционная емкость адсорбента, мг/г; C_p — равновесная концентрация золота в растворе, (мг/дм³); m — масса уг-

ля, г; V — объем раствора, дм^3 ; K_1 — константа скорости адсорбции, $(\text{дм}^3)^2/(\text{г} \cdot \text{мг} \cdot \text{ч})$; K_2 — константа скорости десорбции, ч^{-1} .

Следовательно, корень C_{y2} является равновесным изотермическим значением содержания золота на угле для данной равновесной концентрации золота в растворе (C_p), и связаны эти величины уравнением (13), являющимся модифицированным уравнением изотермы Ленгмюра с поправкой на загрузку угля. То есть изотерма Ленгмюра, как и ожидалось, справедлива и для адсорбции в замкнутом объеме. С учетом выражения (9), связывающего напрямую C_{y2} с начальными параметрами C_{p0} , m , V и C_{y0} , отмечаем, что появляется возможность прогнозного определения C_{y2} при заданных начальных условиях, что, в свою очередь, позволяет находить равновесную концентрацию золота в растворе:

$$C_p = \frac{\frac{C_{y2} K_2}{K_1} \frac{V}{m}}{C_0 - C_{y2}}. \quad (13.1)$$

2. Обсуждение результатов исследований

2.1 Идентификация математической модели адсорбции по экспериментальным данным. Расчетные и экспериментальные кривые кинетики и изотермы

Идентификацию коэффициентов модели проводили, используя полученное по экспериментальным изотермическим значениям уравнение изотермы (9). Первое приближение коэффициентов K_{21} и C_0 определялось методом наименьших квадратов по линеаризованному уравнению изотермы. Уточнение коэффициентов или их подгонку осуществляли итерационным методом по критерию суммы квадратов отклонений рассчитанных значений изотермы от экспериментальных.

Идентификация изотермы (9), с учетом того что $K_{21} = K_2/K_1$ является величиной постоянной, позволила найти численные значения констант $K_{21} = 1,753 \text{ г} \cdot \text{мг}/(\text{дм}^3)^2$ и $C_0 = 56,996 \text{ мг/г}$, которые справедливы для широкого диапазона варьирования внутренних режимных параметров кинетики адсорбции: начальной концентрации золота в растворе (C_{p0}) и массы загрузки АУ (m) в объеме адсорбера (V): $3,2 < C_{p0} < 39,8 \text{ мг/дм}^3$ и $0,5 < m/V < 50 \text{ г/дм}^3$.

Диапазоны варьирования параметров охватывают весь спектр практически встречающихся ва-

риантов концентраций золота в растворе и загрузки адсорберов по АУ. Величины K_{21} и C_0 для данной марки АУ являются физическими константами, которые нет необходимости определять каждый раз при изменении технологических режимов. В отличие от них идентификационный параметр K_1 зависит от внутренних режимных условий, и для того чтобы решение (12) могло быть использовано для практических расчетов, необходимо найти функциональную зависимость K_1 от C_{p0} и m/V . Только в этом случае выражение (12) становится математической моделью, которая обладает прогностическими свойствами и может быть применима на практике для расчета и оптимизации технологического процесса сорбции золота из золотоцианистых растворов на АУ (рис. 1 и 2).

В процессе идентификации (12) по совокупности экспериментальных кинетических кривых, полученных при различных C_{p0} и m/V , была найдена функциональная зависимость K_1 от этих параметров. Дальнейшие расчетные исследования показали, что константа K_1 зависит не только от внутренних режимных параметров, но и от времени: эта зависимость обратно пропорциональна $\sqrt{t}$. С учетом этой закономерности окончательный

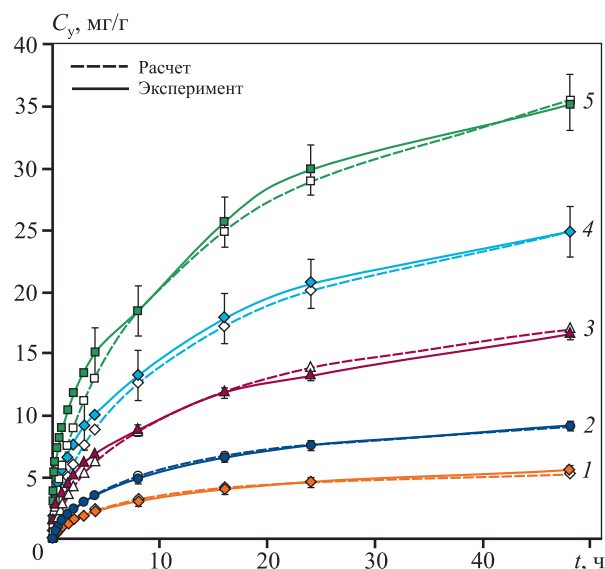


Рис. 1. Кинетические кривые адсорбции AuCN_2^- на активированном угле при различной начальной концентрации золота в растворе и загрузке АУ $m/V = 0,5 \text{ г/дм}^3$ ($m = 1,5 \text{ г}$, $V = 3 \text{ дм}^3$)

1 — $C_{p0} = 3,2$, 2 — 5,9, 3 — 12,7, 4 — 21,6, 5 — 39,8 мг/дм^3

Fig. 1. Kinetic curves of AuCN_2^- adsorption onto activated carbon at different initial gold concentrations in the solution and AC loading $m/V = 0.5 \text{ g/dm}^3$ ($m = 1.5 \text{ g}$, $V = 3 \text{ dm}^3$)

1 — $C_{p0} = 3.2$, 2 — 5.9, 3 — 12.7, 4 — 21.6, 5 — 39.8 mg/dm^3

вид функциональной зависимости K_1 от C_{p0} , m/V и t имеет вид

$$K_1 = \frac{K_{01}}{\sqrt[3]{C_{p0}} \sqrt[3]{m/V} \sqrt[3]{t}}, \quad (14)$$

где $K_{01} = 0,0098$ — константа идентификации скорости адсорбции, не зависящая от внутренних режимных параметров и времени.

Идентификационный параметр K_1 в уравнении (14) является функциональной зависимостью от режимных факторов и времени. Коэффициент K_{01}

входит в K_1 как константа идентификации, полученная по совокупности значений K_1 , в ходе идентификации кинетических кривых при различных значениях C_{p0} и m/V . Зависимость от времени связана не с самим временем, а с изменением условий сорбции в процессе заполнения адсорбируемым металлом зерен сорбента.

2.2 Анализ модифицированного уравнения изотермы на условия предельных переходов к изотермам Генри, Фрейндлиха и предельной адсорбции

Анализ уравнения (13) показывает, что при низких значениях C_p и малых загрузках угля m/V получаем линейную изотерму, поскольку при этом $K_2 \gg K_1 C_p m/V$ и в знаменателе можно пренебречь слагаемым $K_1 C_p m/V$, тогда

$$C_y = \frac{K_1}{K_2} C_0 C_p \frac{m}{V}. \quad (15)$$

Учитывая, что константы скорости адсорбции и десорбции (K_1 и K_2) зависят не только от внутренних, но и от внешних режимных параметров, таких как температура и скорость перемешивания, зависимость их от температуры, согласно уравнению Аррениуса, представим в виде

$$K_1 = K'_{10} e^{\frac{-E_1}{RT}}, \quad (16)$$

$$K_2 = K'_{20} e^{\frac{-E_2}{RT}}, \quad (17)$$

где K'_{10} и K'_{20} — предэкспоненциальные идентификационные множители констант скорости адсорбции и десорбции, зависящие от внутренних режимных параметров и от скорости перемешивания; E_1 и E_2 — энергии активации адсорбции и десорбции, ккал/моль; T — температура, К; $R = 9872$ кал/(К·моль) — универсальная молярная газовая постоянная.

Отсюда

$$\Gamma = \frac{K_{10}}{K_{20}} e^{\frac{-(E_1 - E_2)}{RT}} C_0. \quad (18)$$

С учетом данного выражения уравнение (15) будет являться модифицированной формой линейной изотермы Генри, учитывающей загрузку угля в единице объема раствора (m/V), и в окончательном виде оно будет выглядеть следующим образом:

$$C_y = \Gamma C_p \frac{m}{V}. \quad (19)$$

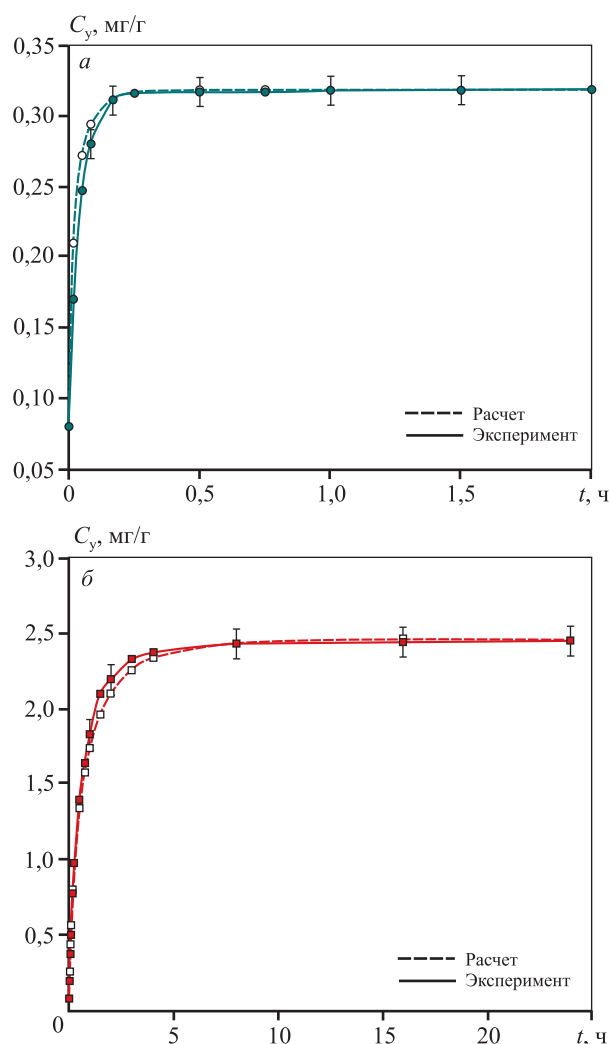


Рис. 2. Кинетические кривые адсорбции AuCN_2^- на АУ при начальной концентрации золота в растворе $C_{p0} = 11,9$ мг/дм³ и загрузке АУ $m/V = 50$ г/дм³ (а) и 5 г/дм³ (б)

а — $m = 75$ г, $V = 1,5$ дм³; б — $m = 7,5$ г, $V = 1,5$ дм³

Fig. 2. Kinetic curves of AuCN_2^- adsorption onto activated carbon at the initial gold concentration in solution $C_{p0} = 11.9$ mg/dm³ and AC loading $m/V = 50$ g/dm³ (a) and $m/V = 5$ g/dm³ (b)

а — $m = 75$ г, $V = 1.5$ дм³; б — $m = 7.5$ г, $V = 1.5$ дм³

При больших значениях C_p и m/V , когда $K_1 C_p m/V \gg K_2$, можно пренебречь K_2 . В этом случае C_y будет стремиться к предельной равновесной емкости адсорбента т.е. $C_y \rightarrow C_0$. При средних значениях произведения $C_p \cdot m/V$ в относительно узком интервале варьирования концентрации золота в растворе и средней загрузке угля изотерму Ленгмюра можно аппроксимировать модифицированной изотермой Фрейндлиха [12]:

$$C_y = K \left(C_p \frac{m}{V} \right)^\alpha, \quad (20)$$

где α — константа идентификации.

Таким образом, если имеются хотя бы одна кинетическая кривая и экспериментальная изотерма адсорбции, полученная в достаточно широких пределах варьирования концентраций золота в растворе и загрузки АУ, то, идентифицируя по этим данным изотерму (13) и решая уравнение кинетики (3) или (12) с использованием констант K_1 , K_2 , C_0 в качестве коэффициентов идентификации, всегда можно добиться необходимой точности в описании этих кривых путем подбора тем или иным способом значений K_1 , K_2 , C_0 .

При графическом изображении полученных модифицированных изотерм (рис. 3) по оси абсцисс должны откладываться значения обобщенного параметра $C_{p0} \cdot m/V$ или $C_p \cdot m/V$. Найденные константы K_1 , K_2 и C_0 могут быть использованы для расчета равновесных значений C_{y2} и C_p , а также концентраций C_y и C_p для различных значений времени в том же диапазоне начальных условий, в

которых были получены экспериментальные кривые, использованные для идентификации.

Такого же результата можно достичь, идентифицируя полученное решение (12) по точкам экспериментальных кривых кинетики адсорбционного процесса с использованием этих параметров. Решение (12), полученное в рамках предложенного уравнения кинетики адсорбционного процесса, протекающего в замкнутом объеме, и его анализ, включающий вывод модифицированного уравнения изотермы Ленгмюра, показывают адекватность теоретического обоснования выбора уравнения кинетики реальному процессу адсорбции золота из цианистых растворов на АУ.

2.3 Теоретическое обоснование функциональных зависимостей констант скоростей адсорбции и десорбции от внешних режимных факторов и коэффициента диффузии

На практике адсорбция протекает по многостадийному механизму с последовательными периодами лимитирования процесса различными стадиями [13–17]. На начальном этапе процесс лимитируется конвективным массопереносом в растворе, при этом скорость процесса целиком определяется скоростью перемешивания раствора. По мере заполнения поверхностного слоя адсорбента целевым компонентом процесс постепенно переходит в следующую стадию, которая в дальнейшем лимитируется скоростью пленочно-поверхностной диффузии. Как утверждают авторы работ [1–3; 18], при достижении 40–60 %-ной степени заполнения адсорбента процесс переходит во внутридиффузионную стадию, которая в (2) не отражена, поэтому данное уравнение и его решение будут справедливы лишь для процесса адсорбции на первых двух стадиях, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Идентификация решения (12), представляющего собой теоретическую кинетическую кривую, полученную по точкам экспериментальных кинетических кривых с использованием трех коэффициентов идентификации K_1 , K_2 и C_0 , дает расчетные кинетические кривые, практически полностью совпадающие с экспериментальными в пределах точности проведенных экспериментов (см. рис. 1 и 2). На графиках кинетики указан доверительный интервал для точек экспериментальных значений, рассчитанный для надежности $P = 0,95$; диапазоны точности для различных концентраций золота

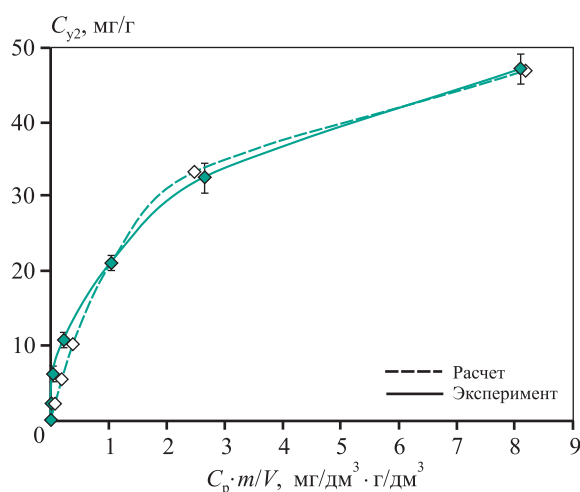


Рис. 3. Экспериментальная и расчетная по формуле (9) изотермы адсорбции

Fig. 3. Experimental and calculated adsorption isotherm according to formula (9)

в растворе приведены выше в разделе «Методика исследований».

Коэффициенты идентификации имеют ясный физический смысл и могут быть в дальнейшем экспериментально исследованы с целью выявления их функциональной зависимости не только от внутренних режимных параметров, установленных нами, но и от различных внешних условий и внутренних характеристик адсорбента, поскольку они представляют из себя интегральные характеристики. Влияние параметров скорости перемешивания и температуры на значения K_1 , K_2 можно установить исходя из общих теоретических представлений.

Константы скорости адсорбции и десорбции (K_1 , K_2) зависят как от внешних режимных параметров — скорости перемешивания (ϑ) и температуры (T), так и от внутренней характеристики адсорбента — коэффициента диффузии (D). Общую функциональную структуру этих констант в зависимости от внешних условий с учетом температурной зависимости по уравнению Аррениуса [19] и внутренней характеристики — коэффициента диффузии, можно представить следующим образом:

$$K_1 = K_{10} f(\beta, D) e^{\frac{-E_1}{RT}}, \quad (21)$$

$$K_2 = K_{20} f(\beta, D) e^{\frac{-E_2}{RT}}, \quad (22)$$

где K_{10} и K_{20} — параметры идентификации, не зависящие от внешних режимных параметров и коэффициента диффузии, но зависящие от внутренних режимных параметров C_{p0} и m/V ; $f(\beta, D)$ — обобщенный коэффициент массопередачи процесса адсорбции — функция, зависящая от β и D ; β — коэффициент конвективного массопереноса, прямо пропорционально зависящий от скорости перемешивания ϑ в виде $\beta = \alpha\vartheta$; D — обобщенный коэффициент внутрипленочной и приповерхностной диффузии золота в АУ.

Единичный акт массопереноса цианистого комплекса золота из раствора в АУ складывается из двух процессов, протекающих последовательно. Первый — это массоперенос внутри объема раствора от мест с текущей концентрацией C_p к местам с обедненной концентрацией, т.е. непосредственно к адсорбционной поверхности гранул угля. Скорость этого процесса полностью зависит от скорости перемешивания раствора (ϑ) и представляет собой конвективный массоперенос. Второй процесс — это массоперенос внутрипле-

ночный и диффузионный в приповерхностной тонкой оболочке гранул угля, т.е. в макро- и микропорах адсорбента. Приблизительно представить суммарный результат последовательных микропроцессов, протекающих внутри объема раствора и на поверхности гранул угольного адсорбента в ходе массопереноса, можно как массообменный процесс, зависящий от некоторого обобщенного коэффициента массопередачи (K), обратного к полному сопротивлению массопередачи (r). Этот коэффициент зависит как от условий перемешивания раствора, так и от физико-химических характеристик угольного адсорбента.

Известно, что сопротивление массопередачи в последовательно протекающих процессах подчиняется закону аддитивности сопротивлений для массообменных процессов [20]. С учетом этого запишем выражение для полного сопротивления массопередачи (r) в процессе адсорбции. Полагая, что конвективное (r_k) и диффузионное (r_d) сопротивления выражаются формулами обратной зависимости от коэффициентов конвективного (β) и диффузионного (D) процессов массопереноса:

$$r_k = \frac{1}{\beta}, \quad (23)$$

$$r_d = \frac{1}{D}. \quad (24)$$

Полное сопротивление для последовательных процессов массопереноса, согласно закону аддитивности сопротивлений, будет равно

$$r = r_k + r_d = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{D}. \quad (25)$$

Следовательно, выражение для обобщенного коэффициента массопередачи будет иметь вид

$$K = \frac{1}{r} = \frac{\beta D}{\beta + D}. \quad (26)$$

Так как $\beta = \alpha\vartheta$, окончательно можно записать

$$K = \frac{\alpha \vartheta D}{\alpha \vartheta + D}. \quad (27)$$

Искомая функция $f(\beta, D)$ есть обобщенный коэффициент массопередачи, т.е. $K = f(\beta, D)$. С учетом полученных соотношений константы скорости K_1 и K_2 описываются следующими уравнениями:

$$K_1 = K_{10} \frac{\alpha \vartheta D}{\alpha \vartheta + D} e^{\frac{-E_1}{RT}}, \quad (28)$$

$$K_2 = K_{20} \frac{\alpha \vartheta D}{\alpha \vartheta + D} e^{\frac{-E_2}{RT}}. \quad (29)$$

Представленные выражения (28), (29) отражают одну из основных закономерностей адсорбционных процессов, а именно пропорциональную, или линейную, зависимость скорости процесса адсорбции от скорости перемешивания. С ее увеличением (при малых ее значениях) скорость адсорбции возрастает пропорционально, при этом кривая кинетики линейно идет вверх. При средней скорости перемешивания ее увеличение влечет за собой нелинейное изменение скорости процесса адсорбции, что выражается искривлением кривой кинетики и постепенным ее выполаживанием. При повышении больших скоростей перемешивания скорость процесса адсорбции перестает расти, что характеризуется выходом на полку кривой кинетики.

С этим связаны отчасти понятия лимитирующих стадий процесса адсорбции — либо стадия конвективного массопереноса, если скорость адсорбции зависит от скорости перемешивания, либо приповерхностная (внутрипленочная стадия) массопереноса, либо чисто внутридиффузионная стадия [20–22].

Вторым важным обстоятельством, подтверждающим справедливость полученных выражений для констант K_1 и K_2 , является то, что кинетические параметры β и D входят в константы K_1 и K_2 таким образом, что в уравнении изотермы (9) они взаимно сокращаются и не влияют на поведение кривой изотермы, что полностью соответствует теоретическим представлениям об изотермических равновесных состояниях.

Заключение

На основании теоретических представлений о механизме процесса адсорбции AuCN_2^- из цианистых растворов на АУ предложено уравнение кинетики адсорбции 3-го порядка с учетом загрузки массы активированного угля на единицу объема раствора, которое позволило получить адекватные аналитические решения не только для кинетики, но и для изотермы процесса адсорбции. Полученное при этом уравнение изотермы является следствием из решения уравнения кинетики, что дает возможность расчетным путем с использованием полученных формул находить равновесные изотермические значения C_y и C_p для различных начальных параметров C_{y0} , C_{p0} , m и V . Разработанная математическая модель позволяет находить стандартизованные физические константы C_0 и K_{21}

по экспериментальным данным изотермы сорбции для различных видов углей в стандартных условиях.

Представлено теоретическое обоснование для функциональных зависимостей физических констант скоростей адсорбции и десорбции от внешних режимных параметров (температуры и скорости перемешивания), а также внутренней физико-химической характеристики адсорбента (коэффициента диффузии). Полученные результаты могут быть использованы для практических расчетов при оптимизации технологического процесса сорбции золота из цианистых растворов при условии продолжительности контакта угольного адсорбента с цианистым раствором не более 2 суток.

Список литературы/References

1. Nicol M. J., Fleming C. A., Cromberge G. The absorption of gold cyanide onto activated carbon. I. The kinetics of absorption from pulps. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*. 1984; 84 (2):50–54.
2. Nicol M. J., Fleming C. A., Cromberge G. The absorption of gold cyanide onto activated carbon. II. Application of the kinetic model to multistage absorption circuits. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*. 1984; 84 (3):70–78.
3. Nicol M. J., Fleming C. A. The absorption of gold cyanide onto activated carbon. III. Factors influencing the rate of loading and the equilibrium. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*. 1984;84(4):85–93.
4. Vegter N.M. The distribution of gold in activated carbon during adsorption from cyanide solutions. *Hydrometallurgy*. 1992; 30(1-3):229–242.
[https://doi.org/10.1016/0304-386X\(92\)90086-F](https://doi.org/10.1016/0304-386X(92)90086-F)
5. Jinsong X., Rajashekhar M., Twinney J., Ghahreman A. A review on adsorption mechanism of gold cyanide complex onto activation carbon. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*. 2022;111:35–42.
<https://doi.org/10.1016/j.jiec.2022.04.014>
6. Buah W. K., Darmey J. and Osei F. Effects of maturity of coconut shells on gold adsorption efficiencies of derived activated carbons. *Ghana Mining Journal*. 2019;19(2): 50–54. <https://doi.org/10.4314/gm.v19i2.7>
7. Khosravi R., Azizi A., Ghaedrahmati R., Gupta V.K., Agarwal S. Adsorption of gold from cyanide leaching solution onto activated carbon originating from coconut shell — Optimization, kinetics and equilibrium studies. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*. 2017;54:464–471.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jiec.2017.06.036>

8. Ефремова С.В., Кабланбеков А.А., Анарбеков К.К., Бунчук Л.В., Сухарников Ю.И., Богданович Н.И., Терликбаева А.Ж., Жарменов А.А. Углеродный сорбент на основе мелочи спецкокса для извлечения золота для извлечения золота. *Химия твердого топлива*. 2019;53(4):18–25.
<https://doi.org/10.1134/S0023117719040066>
Efremova S.V., Kablanbekov A.A., Anarbekov K.K., Bunchuk L.V., Sukharnikov Y.I., Bogdanovich N.I., Terlikbaeva A.Z., Zharmenov A.A. Carbon sorbent based on special fine coke for the extraction of gold. *Solid Fuel Chemistry*. 2019; 53(4):18–25. (In Russ.).
<https://doi.org/10.1134/S0023117719040066>
9. Ларин А.В. Уравнения материального баланса и их решения в линейной динамике адсорбции. *Физико-химия поверхности и защита материалов*. 2022;58(1):3–7.
<https://doi.org/10.31857/S0044185622010132>
Larin A.V. Material balance equations and their solutions in linear adsorption dynamics. *Protection of Metals and Physical Chemistry of Surfaces*. 2022;58(1):3–7 (In Russ.).
<https://doi.org/10.31857/S0044185622010132>
10. Ёлшин В.В., Колодин А.А., Овсяков А.Е. Измерение концентрации золота в цианистых растворах. *Вестник Иркутского государственного технического университета*. 2010;5(45):187–194.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15255131>
Elshin V.V., Kolodin A.A., Ovsyukov A.E. Measurement of gold concentration in cyanide solutions. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2010;5(45):187–194. (In Russ.).
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15255131>
11. Kamke E. Differentialgleichungen. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1962. 336 p.
12. Adamson A. Physical chemistry of surfaces. New York: Wiley, 1976. 698 p.
13. Jianping J., Yuexin H., Hui L., Yangyang H., Yongjun P., Xiaotian G., Wei Y. Mineral phase and structure changes during roasting of fine-grained carbonaceous gold ores and their effects on gold leaching efficiency. *Chinese Journal of Chemical Engineering*. 2019;27(5):1184–1190.
<https://doi.org/10.1016/j.cjche.2018.08.006>
14. Лобанов В.Г., Тимофеев Е.И. Разработка и внедрение современной технологии цианистого выщелачивания золота из гравитационных концентратов. *Металлург*. 2017;(6):75–79.
<https://doi.org/10.1007/s11015-017-0522-9>
Lobanov V.G., Timofeev E.I.. Development and implementation of modern technology of cyanide leaching of gold from gravity concentrates. *Metallurg*. 2017;(6):75–79. (In Russ.).
<https://doi.org/10.1007/s11015-017-0522-9>
15. Schwaab M., Steffani E., Barbosa-Coutinho E., Severo Júnior J.B.. Critical analysis of adsorption/diffusion modelling as a function of time square root. *Chemical Engineering Science*. 2017;173:179–186.
<https://doi.org/10.1016/j.ces.2017.07.037>
16. McLaughlin J., Agar G.E. Development and application of a first order rate equation for modelling the dissolution of gold in cyanide solution. *Minerals Engineering*. 1991;4(12):1305–1314.
[https://doi.org/10.1016/0892-6875\(91\)90174-T](https://doi.org/10.1016/0892-6875(91)90174-T)
17. Войлошников Г.И., Мурашова О.Н., Бывальцев А.В. Математическое моделирование и оптимизация противоточного сорбционного процесса извлечения золота. *Вестник Иркутского государственного технического университета*. 2010; 6(46):183–188.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15486093>
Voiloshnikov G.I., Murashova O.N., Byvaltsev A.V. Mathematical modeling and optimization of the counter-current sorption process of gold extraction. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2010;6(46):183–188. (In Russ.).
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15486093>
18. Chu K.H. Extracting surface diffusion coefficients from batch adsorption measurement data: application of the classic Langmuir kinetics model. *Environmental Technology*. 2017;40(5):543–552.
<https://doi.org/10.1080/09593330.2017.1397767>
19. Stiller W. Arrhenius equation and non-equilibrium kinetics: 100 years Arrhenius equation. Leipzig: BSB B.G. Teubner, 1989. 160 p.
20. Ибрагимова Р.И., Гребенников С.Ф., Гурьянов В.В., Федюкевич В.А., Воробьев-Десятовский Н.В. Влияние пористой структуры активированного угля на кинетику адсорбции цианидного комплекса золота (I). *Журнал Физической химии*. 2014;88(2):1052–1057.
<https://doi.org/10.7868/S0044453714060168>
Ibragimova R.I., Grebennikov S.F., Guryanov V.V., Fedyukevich V.A., Vorobyev-Desyatovsky N.V. Effect of the porous structure of activated carbon on the adsorption kinetics of gold (I) cyanide complex. *Russian Journal of Physical Chemistry A*. 2014;88(2):1052–1057.
<https://doi.org/10.7868/S0044453714060168>
21. Inglezakis V.J., Fyrrillas M.M., Park J. Variable diffusivity homogeneous surface diffusion model and analysis of merits and fallacies of simplified adsorption kinetics equations. *Journal of Hazardous Materials*. 2019;367:224–245.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jhazmat.2018.12.023>
22. Тукмаков Д.А. Математическая модель нестационарной сорбции в двухфазной среде, учитывающая пространственную неравномерность распределе-

ния концентрации микрокомпонента в фазе сорбента. *Вестник ТвГУ. Серия Химия*. 2019;38(4):26–35. <https://doi.org/10.26456/vtchem2019.4.3>

Tukmakov D.A. Mathematical model of non-stationary sorption in a two-phase medium taking into account

the spatial inequality of the distribution of the micro-component concentration distribution in the sorbent phase. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Khimiya*. 2019;38(4):26–35. (In Russ.). <https://doi.org/10.26456/vtchem2019.4.3>

Информация об авторах

Виктор Владимирович Ёлшин — д.т.н., профессор кафедры автоматизации и управления, Иркутский национальный исследовательский технический университет (ИРНИТУ).

<https://orcid.org/0000-0002-0447-4831>

E-mail: dean_zvf@istu.edu

Александр Петрович Миронов — к.т.н., доцент, науч. сотрудник кафедры автоматизации и управления, ИРНИТУ. <https://orcid.org/0009-0002-0530-8015>

E-mail: mironoff.alexander@yandex.ru

Анастасия Андреевна Лисицына — ассистент кафедры автоматизации и управления, ИРНИТУ.

<https://orcid.org/0009-0008-9781-1593>

E-mail: Gerasimovan19@rambler.ru

Information about the authors

Viktor V. Elshin — Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Department “Automation and Control”, Irkutsk National Research Technical University (INRTU).

<https://orcid.org/0000-0002-0447-4831>

E-mail: dean_zvf@istu.edu

Alexander P. Mironov — Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department “Automation and Control”, INRTU. <https://orcid.org/0009-0002-0530-8015>

E-mail: mironoff.alexander@yandex.ru

Anastasia A. Lisitsyna — Assistant Lecturer of the Department “Automation and Control”, INRTU.

<https://orcid.org/0009-0008-9781-1593>

E-mail: Gerasimovan19@rambler.ru

Вклад авторов

В.В. Ёлшин — определение концепции исследования, формулирование цели работы, корректировка текста статьи, участие в обсуждении результатов.

А.П. Миронов — обработка экспериментальных данных, написание текста статьи, участие в обсуждении результатов.

А.А. Лисицына — проведение математической обработки экспериментальных данных, оформление статьи, участие в обсуждении результатов.

Contribution of the authors

V.V. Elshin — conceptualized the study, formulated the research objectives, wrote the manuscript, and participated in the discussion of the results.

A.P. Mironov — processed the experimental data, contributed to manuscript writing, and participated in the discussion of the results.

A.A. Lisitsyna — performed mathematical processing of the experimental data, contributed to manuscript writing, and participated in the discussion of the results.

Статья поступила в редакцию 07.12.2023 г., доработана 23.03.2024 г., подписана в печать 06.05.2024 г.

The article was submitted 07.12.2023, revised 23.03.2024, accepted for publication 06.05.2024